EXERCICE N°1 : 4 points 25 '

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}+3x & si\ \ x\le -1\\ x^2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & si\ \ -1<x<0\\ \dfrac{x+\sin x}{2x+1} & si\ \ x\ge 0\end{cases}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $\dfrac{x-1}{2x+1}\le f(x)\le\dfrac{x+1}{2x+1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat .

2°) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une direction asymptotique que l'on précisera.

3°) a) Montrer que pour tout $x\in]-1,0[$, on a : $0\le f(x)\le x^2$.

b) Etudier alors la continuité de f en 0.

EXERCICE N°2 : 6 points 40 '

1°) Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ par :

$g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et dont le tableau de variation est :

x	0	$+\infty$
g	$+\infty$ ↘	-1

On désigne par C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

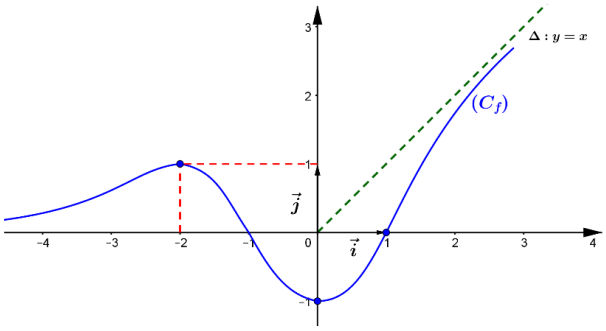
a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$.

b) Montrer que l'équation $g(x)=2x$ admet dans $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$ une unique solution α.

c) Déduire la position relative de C_g et la droite $D: y=2x$ sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

2°) Dans le graphique ci-contre : (C_f) est la courbe représentative dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle IR .



- L'axe des abscisse est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.
- (C_f) admet une asymptote d'équation : $\Delta : y = x$ au voisinage de $+\infty$.

On pose $h(x) = g \circ f(x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

b) Déterminer $h(-2)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$.

c) Montrer que pour tout $x > 1$; on a : $h(x) > -1$.

EXERCICE N°3 : 6 points 30 '

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1°) Soit l'équation (E): $z^2 - (2i - ie^{i\theta})z - 1 + e^{i\theta} = 0$, , où $\theta \in]0,\pi[$.

a) Vérifier que i est une solution de (E) .

b) Déterminer alors l'autre solution de (E) .

2°) Soit U un nombre complexe **non réel** et A, B et C d'affixes respectives $U, \overline{U}$ et $\dfrac{U^2}{\overline{U}}$.

Montrer que ABC est un triangle isocèle en A.

3°) Dans la suite on pose $U = i - ie^{i\theta}$, où $\theta \in]0,\pi[$

a) Montrer que $U = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) Vérifier que $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -\dfrac{U}{\overline{U}}$.

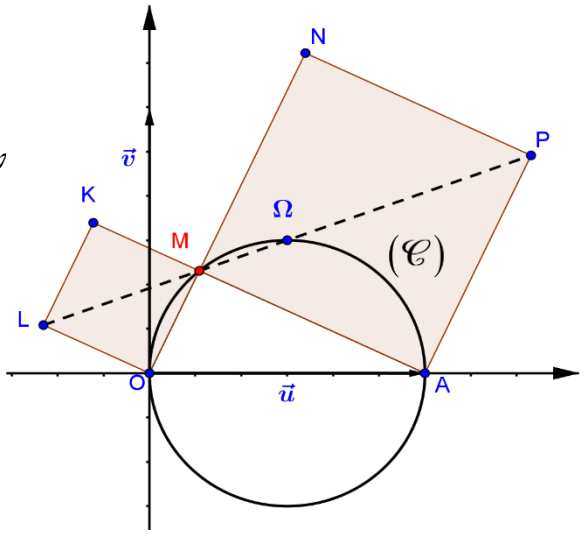
c) Montrer alors que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi + \theta\,[2\pi]$

d) En déduire pour quelle valeur de θ, ABC est un triangle équilatéral

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°4 : 4 points 25 '

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe 1, $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[OA]$, M un point variable du cercle $(\mathscr{C})$ tels que $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $OMKL$ est un carré de sens direct. On pose Z_M, Z_L, Z_K, les affixes respectives des points M, L, K.



1°) a) Calculer $\left|\frac{Z_L}{Z_M}\right|$ et $\left|\frac{Z_K}{Z_M}\right|$.

b) Vérifier que $\arg\left(\frac{Z_L}{Z_M}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$, et $\arg\left(\frac{Z_K}{Z_M}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

c) Écrire alors $\frac{Z_L}{Z_M}$ et $\frac{Z_K}{Z_M}$ sous forme exponentielle.

d) En déduire que $Z_L=iZ_M$ et $Z_K=(1+i)Z_M$.

2°) Soit Z_P et Z_N les affixes respectives des points P et N tels que : $Z_P=-iZ_M+1+i$ et $Z_N=(1-i)Z_M+i$.

Montrer que le quadrilatère $MAPN$ est un carré.

3°) a) Montrer que P et L sont symétriques par rapport à un point fixe Ω que l'on précisera.

b) Vérifier que le point Ω appartient à $(\mathscr{C})$.

4°) a) Montrer que $Z_K-Z_\Omega=(1+i)\left(Z_M-\frac{1}{2}\right)$ et que $Z_N-Z_\Omega=(1-i)\left(Z_M-\frac{1}{2}\right)$.

b) Montrer que $\frac{aff\overrightarrow{\Omega K}}{aff\overrightarrow{\Omega N}}=i$.

c) En déduire la nature exacte du triangle ΩNK.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com